COLÉGIO SANTO IVO

Educação Infantil - Ensino Fundamental - Ensino Médio

Roteiro de Estudos

3ª trimestre – 2017

Disciplina: Matemática – 2ª série
Prof. Vitor

Conteúdos:

- **Análise Combinatória**
  - Princípio fundamental da contagem.
  - Fatorial de um número natural.
  - Permutações.
  - Arranjos.
  - Combinações.

- **Geometria Espacial.**
  - Poliedros.
  - Relação de Euler.
  - Prismas e paralelepípedo e cubo.
  - Prismas regulares.
  - Pirâmide (pirâmides regulares e tetraedros).
  - Cilindro.
  - Cone.
  - Esfera

Orientação de Estudo:

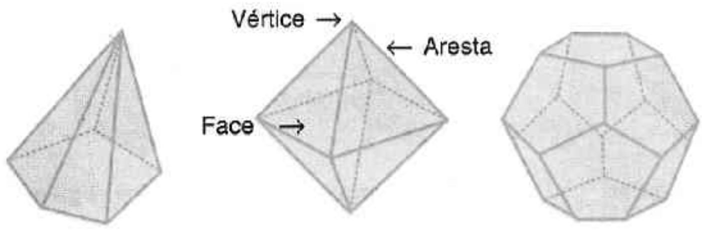
1. Retome os conceitos estudados (através das anotações e exercícios realizados no caderno) e reforce lendo o livro didático.

2. Assistir às aulas indicadas na plataforma Geekie:
3. Fazer exercícios do livro didático referentes a cada capítulo.

Geometria Espacial

1) Poliedros convexos

Observe os sólidos abaixo cujas faces são polígonos convexos.



Podemos observar que:

a) Cada aresta é comum a duas e somente a duas faces

b) Duas faces nunca estão num mesmo plano

c) O plano de cada face deixa as demais faces no mesmo semi-espaço.

Aos sólidos que satisfazem essas condições chamamos **poliedros convexos.**
Assim, um poliedro possui

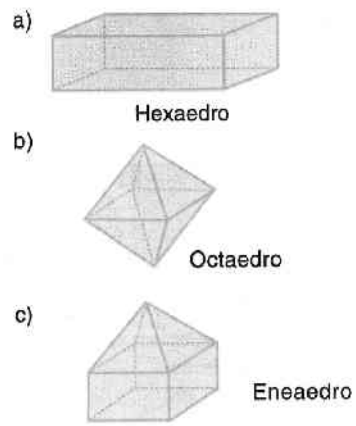
- ❖ Faces (são polígonos convexos)
- ❖ Arestas (são os lados do polígono)
- ❖ Vértices (são os vértices do polígono)
- ❖ Superfície (é a união das faces do poliedro)

1.1) **Classificação**

Classificamos um poliedro de acordo com o número de faces. O número mínimo de faces de um poliedro convexo são quatro.

Veja alguns exemplos:

- ❖ Tetraedro : 4 faces
- ❖ Pentaedro : 5 faces
- ❖ Hexaedro : 6 faces
- ❖ Heptaedro : 7 faces
- ❖ Octasedro : 8 faces
- ❖ Decaedro : 10 faces
- ❖ Dodecaedro : 12 faces
- ❖ Icosaedro: 20 faces



1.2) Teorema de Euler

Num poliedro convexo, se V, A e F são os números respectivamente, de vértices, de arestas e de faces, então vale a seguinte relação:

$$V - A + F = 2$$

Veja:

Poliedro convexo	V	A	F	V - A+ F
Hexaedro	8	12	6	8 – 12 – 6 = 2
Heptaedro	10	15	7	10 – 15 + 7 = 2
Decaedro	12	20	10	12 – 20 + 10 = 2
Dodecaedro	20	30	12	20 – 30 +12 = 2

1.3) Poliedros regulares

Um poliedro é regular se, e somente se, forem obedecidas as seguintes condições:

- ❖ Todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si
- ❖ Todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Exemplos

a) Um poliedro convexo tem 22 arestas. O número de vértices é igual ao número de faces. Calcular o número de vértices desse poliedro

Soluçao:

apenas utilizando a formula resolvera o exercício logo V – A + F = 2 como o numero de vértices é igual ao numero de faces temos:

2V – A = 2,
2V = 2 + 22,
V = 12

b) Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas faces pentagonais. Calcular o número de arestas e o número de vértices.

Exercícios

1) (UFPA) Um poliedro convexo tem 6 faces e 8 vértices. O número de arestas é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

2) (PUC-SP) O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

3) (Cesgranrio) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O numero de vértices do poliedro é:

a) 80 c) 50
b) 60 d) 48

4) (Acafe-SC) Um poliedro convexo tem 15 faces triangulares, 7 faces pentagonais e 2 faces hexagonais. O número de vértices desse poliedro é:

a) 25 c)73
b) 48 d) 96

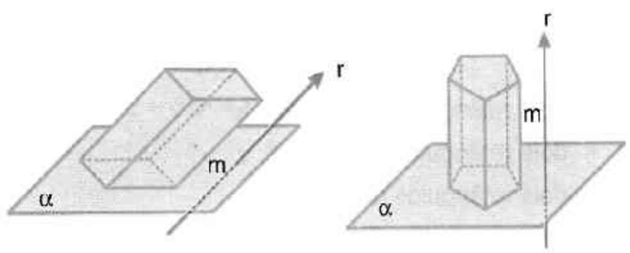
5) (Puccamp-SP) O “cubo octaedro” é um poliedro que possui 6 faces quadrangulares e 8 triangulares. O número de vértices desse poliedro é:

a) 16 c) 12
b) 14 d) 10

GABARITO				
1) d	2) b	3) b	4) a	5) c

2) **Prismas**

O prisma é um sólido delimitado por faces planas, conforme verificamos nas figuras seguintes.



2.1) Elementos principais

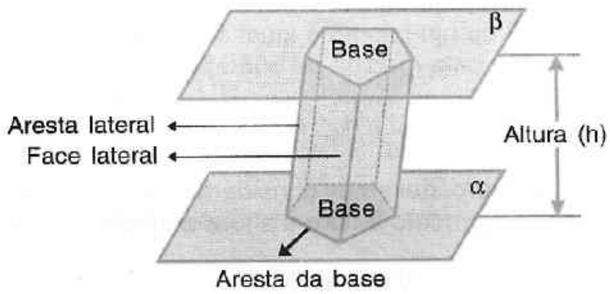
- **Bases:** formada por polígonos
- **Arestas das bases:** lados das bases

❖ **Faces laterais:** formadas por paralelogramos

❖ **Altura :** distância H entre os planos das bases

❖ **Superfície lateral:** conjunto de todas as faces laterais

❖ **Superfície total :** união da superfície lateral com as duas bases



2.2) Classificação:

Podemos classificar um prisma de acordo com o número de lados das duas bases.

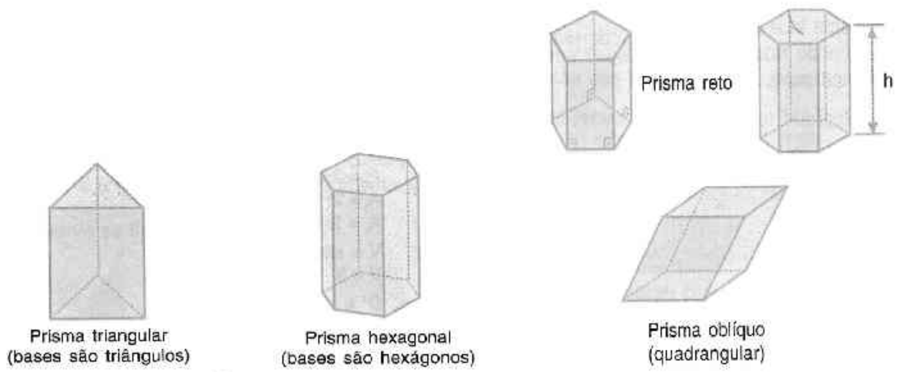
❖ **Prisma triangular**: bases : triângulos

❖ **Prisma quadrangular** : bases : quadriláteros

❖ **Prisma pentagonal** : bases: pentágonos

❖ **Prisma hexagonal**: bases: hexágonos

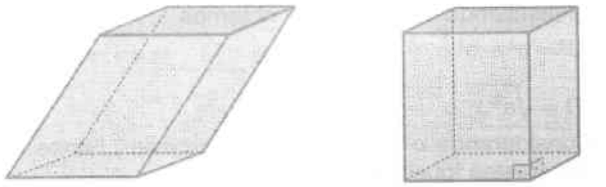
Se as bases são polígonos regulares, o prisma é chamado **regular**.



Um prisma é **reto** se as arestas laterais forem perpendiculares às bases; caso contrário, o prisma é dito **oblíquo** .

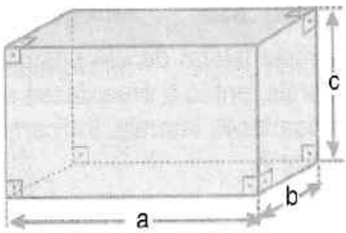
2.3) Paralelepípedos

Denomina-se paralelepípedo o prisma no qual as seis faces são perpendiculares.



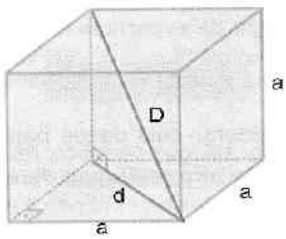
(Paralelepípedo oblíquo) (Paralelepípedo reto)

As dimensões são chamadas **comprimento, largura e altura**, cujas medidas são indicadas por **a, b e c**, respectivamente.



2.4) Cubo

É um paralelepípedo cujas arestas são congruentes entre si. O cubo é também chamado hexaedro regular.

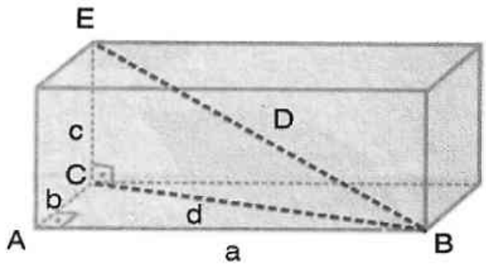


2.5) Diagonal

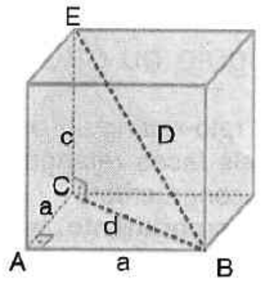
Chamamos diagonal D de um prisma todo segmento de reta cujas extremidades são vértices que não pertencem a uma mesma face desse prisma.

O paralelepípedo a seguir apresenta as arestas de medidas a, b, e c.

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Considerando o cubo um caso particular, temos todas as arestas iguais e de medida **a.**



$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\Downarrow$$
$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$
$$\Downarrow$$
$$D = a\sqrt{3}$$

2.6) Áreas

Como a superfície lateral de um prisma é a reunião de suas faces laterais, então a área dessa superfície é a soma das áreas das faces laterais, indicamos a área da superfície lateral por A_L .

A_L = soma das áreas das faces laterais
A_L = 2pH, onde 2p é o perímetro da base e H é a altura do prisma.

Observação

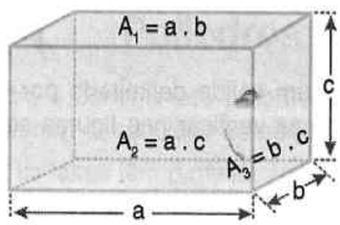
Superfície total de uma prisma é a reunião das suas faces laterais com as suas bases. Indicamos a área da superfície total por A_T .

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Devemos considerar dois casos particulares:

❖ No paralelepípedo as arestas a, b e c, temos como faces

- Dois retângulos de área : a . b
- Dois retângulos de área : a . c
- Dois retângulos de área : b . c



Logo temos

$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

❖ No cubo de aresta de medida a, temos

$$A_T = 2(aa + aa + aa)$$
$$A_T = 2(a^2 + a^2 + a^2)$$
$$\Downarrow$$
$$A_T = 6a^2$$

2.7) Volume

Todo sólido ocupa uma porção do espaço. Essa porção é o volume desse sólido.

O volume V de um prisma é igual ao produto da área de sua base A_B pela medida da sua altura **H**.

$$V = A_B.H$$

- Para um paralelepípedo, devemos considerar a área da base como sendo o produto a . b e a altura a aresta c. Logo

$$V = a.b.c$$

- No caso de uma cubo, as arestas de medida a, o volume é

$$V = a^3$$

Exemplos:

1) Determinar a área total, o volume e a diagonal do paralelepípedo de dimensões 3cm, 4 cm e 5 cm.

2) O volume de um cubo mede 27 cm^3. Calcule.

a) sua área total

b) sua diagonal da face

c) sua diagonal

3) Um prisma regular triangular tem arestas laterais de 6 cm e arestas de base de 4 cm. Obter:

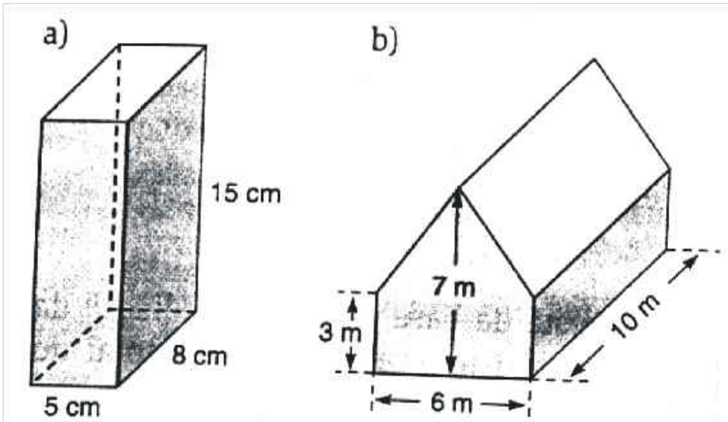
a) O seu volume

b) A sua área lateral

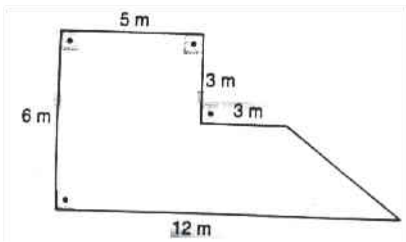
c) A sua área total

Exercícios

1) Calcule a área total dos prismas retos das figuras.



2) Um prisma reto com 1,5 m de altura tem secção transversal como mostra a figura. Determine a área total desse prisma.



3) Um prisma pentagonal regular tem 20 cm de altura. A aresta da base do prisma mede 4 cm. Determine a sua área lateral.

4) Num prisma quadrangular, a aresta da base mede a = 6 m. sabendo que a área lateral do prisma é 261 m², calcule a medida *h* da altura do prisma.

5) Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles com medidas 8dm de base e altura 3 dm.

Sabendo que a altura do prisma é igual a 1/3 do perímetro da base, calcule a área da superfície total do prisma.

6) (UFPA) Num prisma regular de base hexagonal a área lateral mede 36 m² e a altura é 3 m. A aresta da base é:

a) 2 m b) 4 m c) 6 m d) 8 m e) 10 m

7) (UFCE) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a 3, 5 e 7. Sabendo que a diagonal mede 4 cm, calcule o volume do paralelepípedo.

8). (UFPel-RS) De um reservatório de forma cúbica cheio de água forma retirados 2 litros dessa água. Verificando-se que houve uma variação de 5 cm no nível do liquido, calcule quanto mede a aresta interna da caixa-reservatório.

9) (Unicruz-RS) Se a soma das arestas de um cubo é igual a 72 cm, então o volume do cubo é igual a:

a) 100 cm³
b) 40 cm³
c) 144 cm³
d) 16 cm³
e) 216 cm³

10). (UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:

a) 8 400 litros
b) 84 litros
c) 840 litros
d) 8,4 litros
e) n.d.a

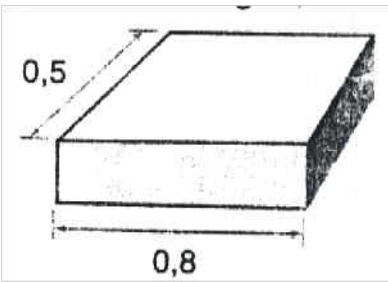
11) O volume do paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede 7 cm e duas de suas dimensões medem, respectivamente, 2 cm e 3 cm é

a) 6 cm³
b) 7 cm³
c) 36 cm³
d) 49 cm³

12) (UFMG) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são três números inteiros e consecutivos. Se a diagonal desse paralelepípedo retângulo é cm, então seu volume, em cm³, é:

a) 6
b) 24
c) 36
d) 60

13) (Mack) A figura abaixo mostra um reservatório de água, totalmente cheio (medidas em metros). Após terem sido consumidos 12 litros de água, o nível d'água terá abaixado



a) 3 dm
b) 3 cm
c) 17 cm
d) 17 dm

14). (Cesgranrio) Ao congelar-se, a água aumenta de 1/15 o seu volume. O volume de água a congelar, para obter-se um bloco de gelo de 8 dm x 4 dm x 3 dm, é

a) 80 dm³ c) 95 dm³
b) 90 dm³ d) 100 dm³

15). (Fuvest) Um tanque em forma de paralelepípedo retângulo tem por base um retângulo horizontal de lados 0,8 m e 1,2 m. Um individuo, ao mergulhar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,075 m. Então o volume do individuo, em m³, é:

a) 0,066 c) 0,096
b) 0,072 d) 0,600

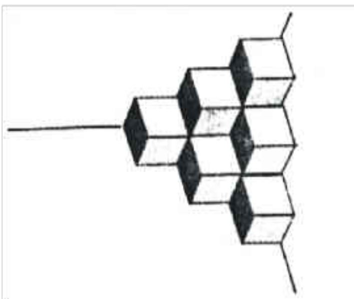
16). (FGV) O acréscimo de volume do paralelepípedo retângulo de aresta de medidas a, b e c, quando aumentamos cada aresta em 10%, é:

a) 30% c) 21%
b) 33,1% d) 10%

17) (UFMG) O volume de uma caixa cúbica é 216 litros. A medida de sua diagonal, em centímetros, é:

a) 6 c) 60
b) 60 d) 900

18) (Mack) Na figura, cada cubo tem volume 1. O volume da pilha, incluindo-se os cubos invisíveis no canto, é:



a) 6 b) 8 c) 9 d) 10

18) Um prisma reto de base um hexágono regular de lado 6 cm. Cada face tem área igual a $\sqrt{3}$ vezes a área da base. Sua altura, em cm, é:

a) 15 b) 18 c) 24 d) 27

19) Num prisma regular de base hexagonal, a área lateral mede 36 m^2 e a altura é 3 m. a aresta da base é:

a) 2 m b) 4 m c) 6 cm d) 8 m

20) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3 , é:

$a)13\sqrt{3}$ d) $27\sqrt{3}$

$b)17\sqrt{3}$ e) $54\sqrt{3}$

21) Se a área da base de um prisma diminui 10 % e a altura aumenta 20%, os seu volume:

a) Aumenta 8%
b) Diminui 10%
c) Aumenta 15%
d) Não se altera

22) Um reservatório tem a forma de um prisma , cuja base reta é um triângulo ABC, retângulo em A. As medidas, em metros, estão indicadas na figura. A capacidade do reservatório, em litros é:

a) 14 000
b) 14 050
c) 14 500
d) 15 000

23) Um prisma de altura h = 1,2 m tem por base um triângulo equilátero de lado 40 cm. O volume desse prisma, medido em litros, é:

$a)96\sqrt{3}$ d) $36\sqrt{3}$

$b)48\sqrt{3}$ e) $24\sqrt{3}$

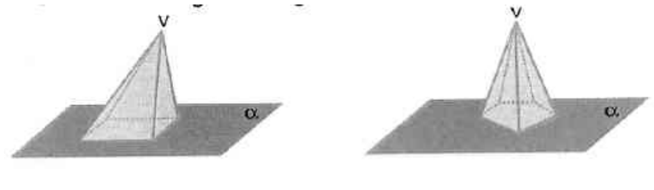
- **Gabarito**

A – 19 – 21 - 22
B - 23
C
D 18 - 20
E

3) **Pirâmide**

A pirâmide é um sólido delimitado por faces planas. Sua base é um polígono e suas faces laterais são triângulos.

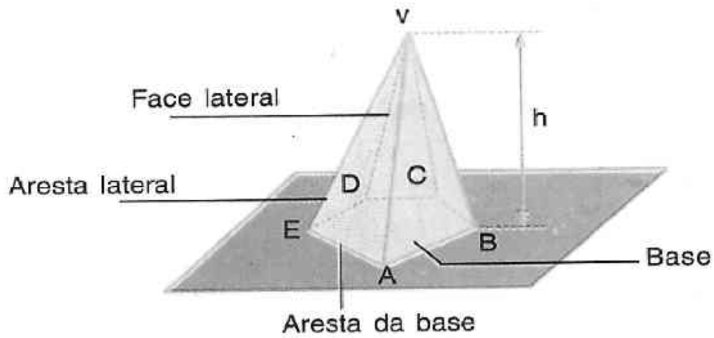
Observe as figuras seguintes:



3.1) Elementos principais

- **Base:** formada por polígono

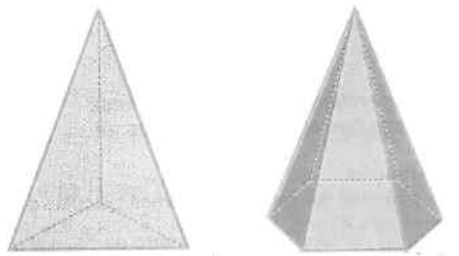
- **Vértice:** ponto V
- **Arestas da Base** : lados do polígono da base
- **Faces laterais** : formada por triângulos
- **Arestas laterais:** lados dos triângulos das faces laterais, com exceção dos lados do polígono da base
- **Altura:** distância H do ponto V ao plano da base
- **Superfície lateral:** conjunto de todas as faces
- **Superfície total** : união da superfície lateral com a base



3.2) Classificação

Podemos classificar uma pirâmide de acordo com o tipo de polígono que constitui a sua base.

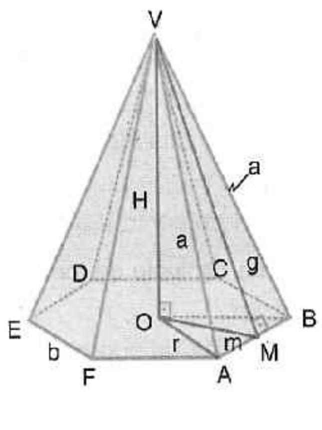
- **Pirâmide triangular**: base triângulo
- **Pirâmide quadrangular**: base quadrilátero
- **Pirâmide pentagonal** : base : pentágono
- **Pirâmide hexagonal** : base : hexágono



Pirâmide triangular (base é um triângulo) Pirâmide hexagonal (base é um hexágono)

Se a base é um polígono regular, a pirâmide é chamada regular. As arestas laterais são congruentes entre si e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si.

3.3) Dimensões lineares da pirâmide



Na figura a seguir, temos uns pirâmide regular, na qual vamos destacar alguns segmentos importantes. A medida de cada um estará sendo representada por uma letra.

- Aresta da base (b)
- Apótema da base (m)
- Raio da base (r)

❖ Altura (h)
❖ Aresta lateral (a)
❖ Apótema da pirâmide (g)

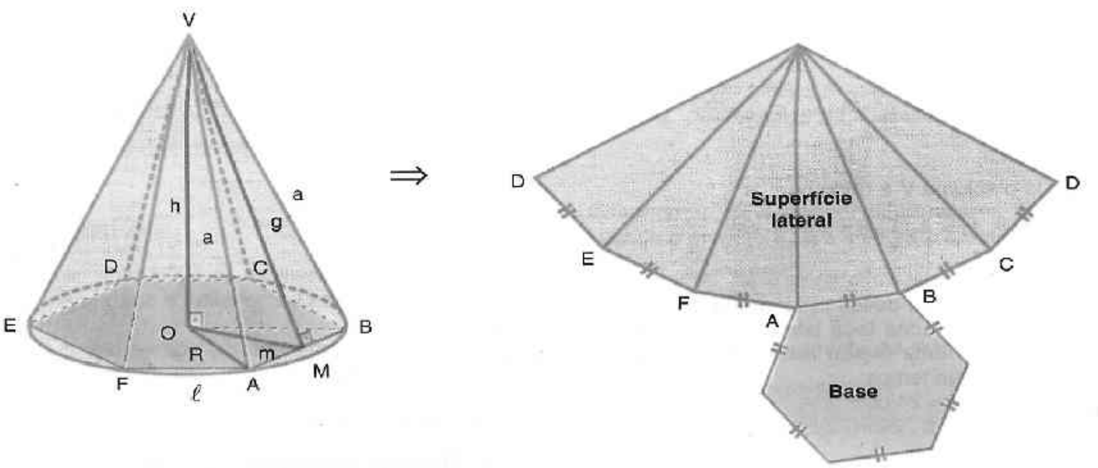
Chama-se apótema de uma pirâmide regular cada uma das alturas de suas faces laterais, relativas às arestas da base.

Os triângulos VOM, VOB e VMB são retângulos. Aplicando-se o teorema de Pitágoras, obtemos algumas relações importantes entre as dimensões lineares citadas anteriormente. Vejamos:

❖ No triângulo VOM : $g^2 = H^2 + m^2$
❖ No triângulo VOB : $a^2 = H^2 + r^2$
❖ No triângulo VMB : $a^2 = g^2 + (b/2^2$

3.4) Áreas

Superfície Lateral é a reunião das faces laterais. Já a **Superfície Total** é a reunião das faces laterais com a base.



Indicando por A_B, A_L e A_T, respectivamente, as áreas da base, da superfície lateral e da superfície total de uma pirâmide, temos:

$$A_T = A_B + A_L$$

A_B = (dependerá do polígono da base)

A_L = soma das áreas das faces laterais

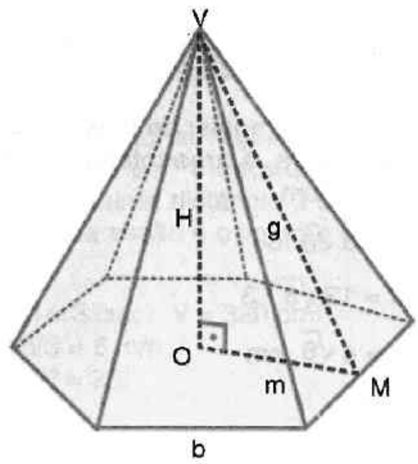
3.5) Volume :

O volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma de base e altura iguais às da pirâmide. Assim temos :

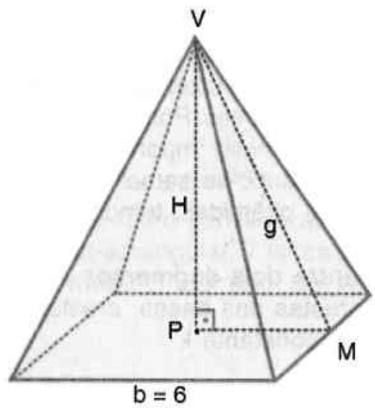
$$V = \frac{A_B \cdot H}{3}$$

Exemplo:

1) Determinar o volume, a área lateral e a área total de uma pirâmide hexagonal regular cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm e o apótema da pirâmide mede 6 cm.

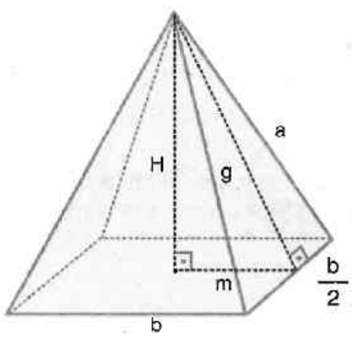


2) Uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 cm tem aresta da base medindo 6 cm. Determinar:
   a) O seu volume
   b) O seu apótema
   c) A sua área total



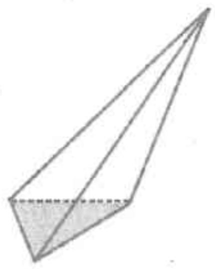
3) Numa pirâmide regular de base quadrada, a área da base é $16cm^2$ e a altura mede 8 cm. Determinar:

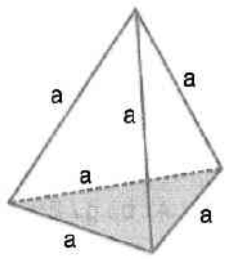
   a) A aresta da base
   b) O apótema da base
   c) O apótema da pirâmide
   d) A aresta lateral
   e) A área lateral
   f) A área total
   g) O volume



3.6) Tetraedro Regular

Chama-se tetraedro regular o tetraedro que possui as seis arestas congruentes entre si. Nesse caso, todas as faces são triângulos equiláteros. O tetraedro é uma pirâmide triangular.


Tetraedro



Tetraedro regular

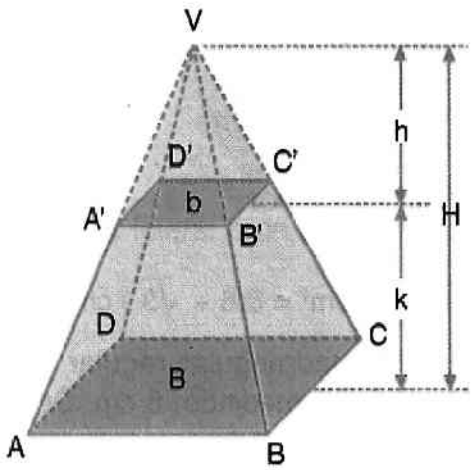
Para o cálculo da área total, da altura e do volume de um tetraedro regular, utilizamos

$$A_T = a^2\sqrt{3} \qquad H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \qquad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Exemplo:

1) Dado um tetraedro regular de aresta 12 cm, calcular a medida H da altura, a área total e o volume.

3.7) Tronco de pirâmide



Dada uma pirâmide e uma seção transversal qualquer paralela à base, chama-se tronco de pirâmide a região entre a base e essa seção transversal.

Nesse caso, podemos dizer que as pirâmides VABCD e VA'B'C'D' são semelhantes. Portanto ocorrem, entre seus elementos, relações muito importantes, que podem ser demonstradas utilizando semelhança de triângulos.

Logo, nas duas pirâmides, temos:

❖ A razão entre dois segmentos correspondentes (alturas, arestas das bases, arestas laterais,...) é igual a uma constante k.

$$k = \frac{H}{h} = \frac{VA}{VA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

❖ A razão entre duas áreas correspondentes (áreas das bases, áreas laterais, áreas totais) é igual a k^2.

$$k^2 = \frac{A_{\Delta ABCD}}{A_{\Delta A'B'C'D'}}$$

❖ A razão entre seus volumes é igual a k^3

$$k^3 = \frac{V_{\Delta ABCD}}{V_{\Delta A'B'C'D'}}$$

Exemplo:

1) Uma pirâmide hexagonal regular de altura 15 cm e volume igual a 320 cm^3 é seccionada por um plano paralelo à base, a uma distância 3 cm do vértice. Determinar a área da seção e o volume do tronco obtido.

Exercícios

1. (UFPA) Uma pirâmide regular cuja base é um quadrado de diagonal 6cm e a altura é igual a 2/3 do lado da base tem área total igual a:

a) 288 cm² c) 238 cm²
b) 252 cm² d) 202 cm²

2. O volume de uma pirâmide regular quadrangular VABCD é 27 $\sqrt{3}$ m³. Se a altura da pirâmide é igual a aresta da base, então a área do triângulo VBD vale, em m²,

Obs.: (B e D são vértices opostos da base ABCD)

a) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

3. (UFMG) A área total de uma pirâmide regular, de altura 30 mm e base quadrada de lado 80 mm, mede, em mm²,

a) 14 400 c) 56 000
b) 44 000 d) 65 000

4. (ITA) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base 64 m² vale:

a) 128 m² c) 135 m²
b) 64 $\sqrt{2}$ m² d) 60 $\sqrt{5}$ m²

5. (UFGO) A base de uma pirâmide é um triangulo eqüilátero, cujo lado mede 4 cm. Sendo a altura da pirâmide igual à altura do triangulo da base, o volume da pirâmide, em cm², é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

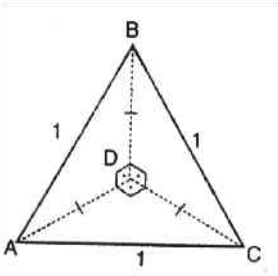
6. O volume do tetraedro, conforme a figura, é:

$a)\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$b)\ \dfrac{\sqrt{2}}{24}$

$c)\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$d)\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}$



7. (UFPR) O volume de um tetraedro regular de 10 cm de altura é, em cm³,

a) 125 c) 250
b) 125 d) 375

8. Uma pirâmide, que tem por base um quadrado de lado 4 cm, tem 10 cm de altura. A que distância do vértice deve passar um plano paralelo às bases, de modo que a secção transversal tenha uma área de 4 cm²?

a) 2 cm c) 4 cm
b) 3 cm d) 5 cm

9. (PUC-MG) Cortando-se uma pirâmide de 30 dm de altura por um plano paralelo à base e distante 24 dm do vértice, obtém-se uma seção cuja área mede 144 dm². A medida da área da base de tal pirâmide, em dm², é:

a) 225 c) 200
b) 212 d) 180

10. (Fatec) Sejam A1 e A2 duas pirâmides semelhantes. Sabe-se que a área da base de A1 é doze vezes maior que a área da base de A2. Se o volume de A2 é V, então o volume de A1 é:

a) 9 $\sqrt{2}$ V c) 12 $\sqrt{2}$ V
b) 24 $\sqrt{3}$ V d) 12 $\sqrt{3}$ V

11. (UFBA) Uma pirâmide regular cuja base é um quadrado de diagonal medindo 6 $\sqrt{6}$ cm e a medida a altura é igual a $\frac{2}{3}$ da medida do lado da base tem área total igual a:

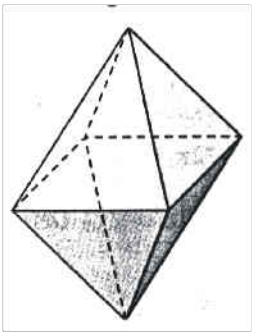
a) 96 $\sqrt{3}$ cm² d) 84 $\sqrt{3}$ cm²
b) 252 cm² e) 576 cm²
c) 288 cm²

12. (UEPG-PR) A aresta lateral e a aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular são iguais e medem $\sqrt{2}$ cm . Qual a altura da pirâmide, em cm?

a) $\sqrt{2}$
b) 4
c) 1
d) 2 $\sqrt{2}$
e) 2

13. (PUCC-SP) Um octaedro regular é um poliedro constituído de 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra figura abaixo.

Se o volume desse poliedro é 72 $\sqrt{2}$ cm³, a medida de sua aresta, em centímetros, é:



a) $\sqrt{2}$ b) 3 $\sqrt{3}$ c) 3 d) 6 $\sqrt{2}$ e) 6 $\sqrt{3}$

14. (PUCC-SP) Uma reta tem altura de 30 cm e base de área *B*. Intercepta-se essa pirâmide por um plano paralelo à sua base, obtendo-se uma outra pirâmide, semelhante à primeira. Se esse plano dista 20 cm da base da pirâmide, a área da base da nova pirâmide é:

$a)\frac{B}{9}$ $b)\frac{2B}{9}$ $c)\frac{4B}{9}$ $d)\frac{B}{3}$ $e)\frac{2B}{3}$

15. (PUC-SP) Um tronco de pirâmide de bases quadradas tem 2 814 cm³ de volume. A altura do tronco mede 18 cm e o lado do quadrado da base maior mede 20 cm. Então, o lado do quadrado da base menor mede:

a) 8 cm
b) 6 cm
c) 3 cm
d) 12 cm
e) 14 cm

GABARITO

A – 1, 3, 9, 14,
B –4, 6, 7, 10
C – 5, 11, 12, 15
D – 2, 8, 13.

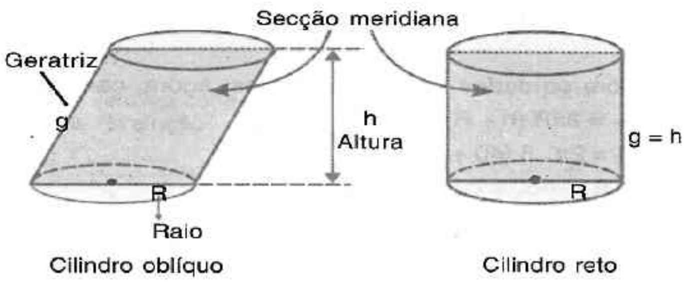
4) Cilindro

4.1) Classificação e elementos

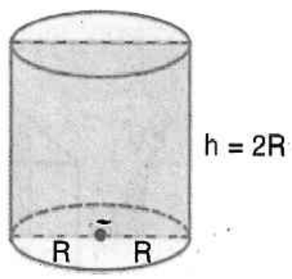
Um cilindro pode ser classificado em:

❖ **Cilindro reto**
Quando as geratrizes são perpendiculares às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um retângulo. Num cilindro reto, a geratriz e a altura são iguais (g = h)

❖ **Cilindro oblíquo**
Quando as geratrizes são obliquas às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um paralelogramo.

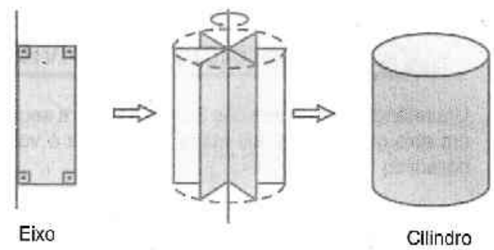


❖ **Cilindro equilátero**
Se a altura do cilindro for igual ao diâmetro da base, ou seja, h = 2R, então a secção meridiana é um quadrado e o cilindro recebe o nome de cilindro equilátero.



Observação:
O cilindro também recebe o nome de cilindro de revolução, porque pode ser pensado como um retângulo que gira em torno de um dos seus lados.

Veja a figura a seguir:



4.2) Área da base, área lateral, área total e volume do cilindro reto

Consideremos um cilindro de raio R e altura h.

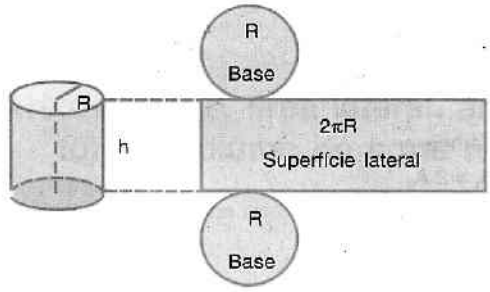
4.2.1) Área da base

A área da base de um cilindro reto é um círculo cuja área é definida por :

$$A_B = \pi r^2$$

4.2.2) Área lateral

A área lateral do cilindro é a reunião de todas as suas geratrizes.



Desenvolvendo-se a superfície lateral, obtém-se um retângulo cuja base mede $2\pi r$, e cuja altura é h. assim,

$$A_L = \text{base x altura} = 2\pi rh$$

4.2.3) Área total

A área total do cilindro é dada por

$$A_T = A_L + 2A_B$$

$$\Downarrow$$

$$A_T = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$\Downarrow$$

$$A_T = 2\pi R(h + R)$$

4.2.4) Volume

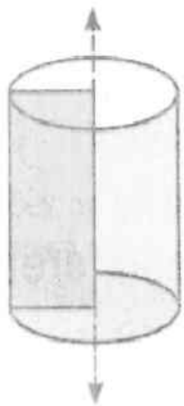
O volume do cilindro reto é dado pelo produto da área da base pela altura ou pela geratriz.

$$V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

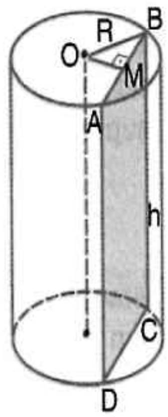
Exemplo :

1) Um retângulo de dimensões 3 cm e 6 cm gira segundo um eixo que contém seu maior lado. Obter o volume do solido gerado.



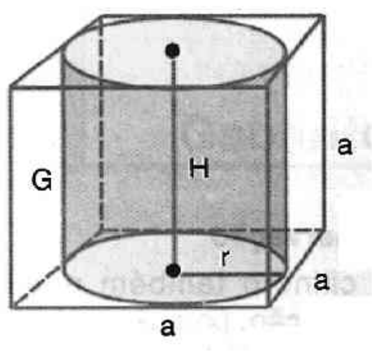
2) Num cilindro circular reto, a área lateral é o dobro da área da base, e sua altura é igual a 5 cm. Obter a área de sua secção meridiana.

3) Um cilindro apresenta o raio da base medindo 5 cm. Ele é seccionado através de um plano paralelo ao seu eixo, a uma distância de 4cm. A secção obtida é um retângulo cuja área mede 240 cm^2 . Obter a área total e o volume desse cilindro. Observar a figura dada. Considerando O o centro da figura, temos : OB = R = 5 cm



4) Obter a razão entre os volumes de dois cilindros: o primeiro inscrito e o segundo circunscrito a um cubo de aresta a.

Na figura, temos um cilindro inscrito num cubo de aresta a



Exercícios

1. (PUC-SP) Quantos litros comporta, aproximadamente, uma caixa d'água cilíndrica com 2 m de diâmetro e 70 cm de altura?

a) 1 250
b) 2 200
c) 2 450
d) 3 140

2. (PUC-RS) Dois cilindros, um de altura 4 e outro de altura 6, têm para perímetro de suas bases 6 e 4, respectivamente. Se V1 é o volume do primeiro e V2 o volume do segundo, então:

a) V1 = V2
b) V1 = 2V2
c) V1 = 3V2
d) 2 V1 = 3V2

3. (UFGO) Para encher um reservatório de água que tem forma de um cilindro circular reto, são necessárias 5 h. Se o raio da base é 3 m e a altura 10 m, o reservatório recebe água à razão de:

a) 18 π m³/h
b) 30 π m³/h
c) 20 π m³/h
d) 6 π m³/h

4. (PUC-SP) Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é 2 mm e seu comprimento é 12 cm?

a) 0,3768
b) 3,7678
c) 0,03768
d) 37,68

5. (UCPR) Temos dois vasilhames geometricamente semelhantes. O primeiro é uma garrafa das de vinho, cuja altura é 27 cm. O segundo é uma miniatura do primeiro, usado como propaganda do produto, e cuja altura é 9 cm. Quantas vezes seria preciso esvaziar o conteúdo da miniatura na garrafa comum, para enche-la completamente?

a) 3 b) 9 c) 18 d) 27

6. (UFMG) Dois cilindros têm áreas laterais iguais. O raio do primeiro é igual a um terço do raio do segundo. O volume do primeiro é V1. o volume do segundo cilindro, em função de V1, é igual a :

a) V1 / 3
b) 3V1 / 2
c) 2V1
d) 3V1

7. (Fatec) Um cilindro reto tem volume igual a 64 dm³ e área lateral igual a 400 cm². O raio da base mede:

a) 16 dm
b) 24 dm
c) 32 dm
d) 48 dm

8. (UFRN) Se um cilindro eqüilátero mede 12 m de altura, então o seu volume em m³ vale

a) 144 π
b) 200 π
c) 432 π
d) 480 π

9. (PUC-SP) Se triplicarmos o raio da base de um cilindro, mantendo a altura, o volume do cilindro fica multiplicado por:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12

10. (UFCE) O raio de um cilindro circular reto é aumentado em 20% e sua altura é diminuída em 25%. O volume deste cilindro sofrerá um aumento de :

a) 2% b) 4% c) 6% d) 8%

11. (UFPA) Um cilindro eqüilátero está inscrito em um cubo de volume 27 cm³. O volume do cilindro mede, em cm³,

a) 9 π /4 c) 27 π /4
b) 27 π /8 d) 27 π

12. (UFMG) Num cilindro reto cuja altura é igual ao diâmetro da base, a área de uma secção perpendicular às bases, contendo os centros dessas, é 64 m². então a área lateral desse cilindro, em m², é:

a) 8 π c) 32 π
b) 16 π d) 64 π

13. (ITA-SP) Num cilindro circular, sabe-se que a altura *h* e o raio da base *r* são tais que os números π *, h, r,* formam, nessa ordem, uma PA de soma 6 π . O valor da área total deste cilindro é:

a) π^3 d) $20\pi^3$
b) $2\pi^3$ e) $30\pi^3$
c) $15\pi^3$

GABARITO

A –3, 4, 9,

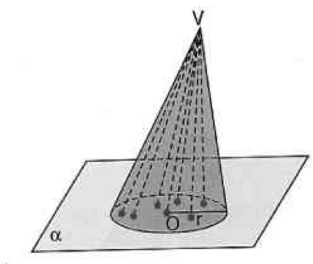
B – 1,

C – 7, 8, 10, 12, 13

D – 2, 5, 6, 11,

5) **Cone**

5.1) Conceito



Consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano α , e um ponto V fora de α . Chama-se cone circular, ou cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra em um ponto do círculo.

5.2) Elementos

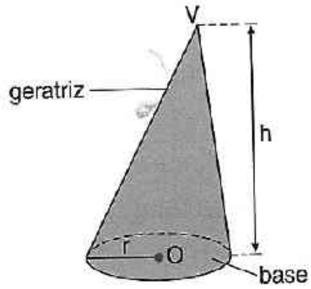
Considerando o cone representado a seguir, temos:

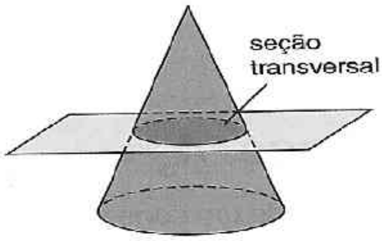
✓ O ponto V é o **vértice** do cone:
✓ O círculo de raio r é a **base** do cone;

✓ Os segmentos com um extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base são as **geratrizes** do cone;

✓ A distância do vértice ao plano da base é a **altura** do cone

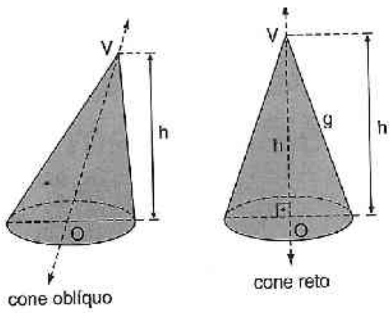
✓ Secção transversal de um cone é qualquer interseção não vazia do cone com um plano paralelo à base (desde que este não passe pelo vértice); trata-se de um círculo.





5.3) Classificação

Um cone pode ser classificado conforme a inclinação da reta VO sendo O o centro da base, em relação ao plano da base:



✓ O cone circular é obliquo quando a reta VO é oblíqua à base;

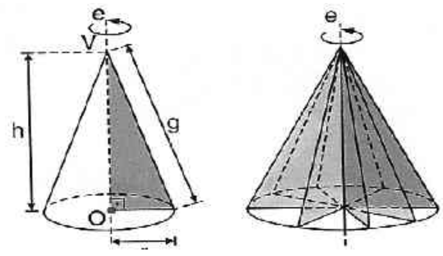
✓ O cone circular é reto quando a reta VO é perpendicular à base

Observação

O cone circular reto é também chamado cone de revolução . Ele gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

No cone de revolução a reta VO é o eixo, e vale a relação

$$r^2 + h^2 = g^2$$

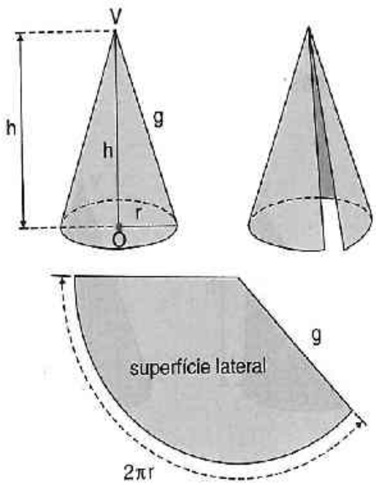


5.4) Áreas

5.4.1) Área da base

A área da base de um cone é a área de um círculo de raio r.

$$A_b = \pi r^2$$



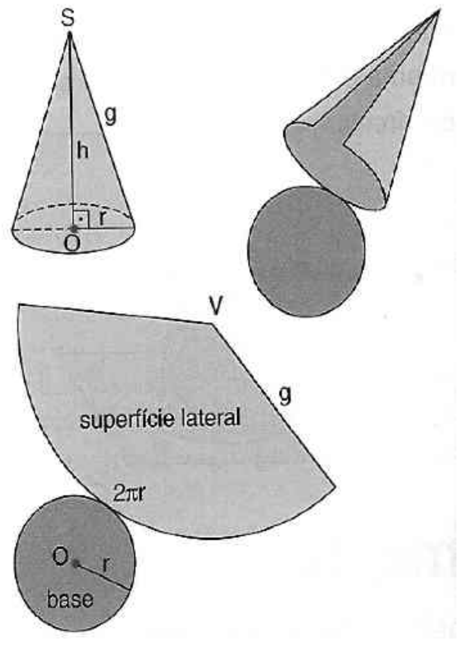
5.4.2) Área Lateral : A_l

A planificação da superfície lateral (ou a reunião das geratrizes) de um cone nos dá um setor circular com as seguintes características:

✓ Raio : g (geratriz do cone)

✓ Comprimento do arco : $2\pi r$ (perímetro da base)

A área lateral do cone é dada por:



$$A_l = \pi r g$$

5.4.3) Área total: A_t

A superfície total de um cone é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. A área dessa superfície é chamada área total.

$$A_t = A_l + A_b$$

$$\Downarrow$$

$$A_t = \pi r g + \pi r^2$$

$$\Downarrow$$

$$A_t = \pi r (g + r)$$

Exemplos:

1) O raio de um setor circular de 150°, em papel, mede 10 cm; o setor vai ser utilizado na confecção de um cone. Vamos determina a área lateral e a área total desse cone.

5.5) Volume:

O volume de um cone vale um terço do produto da área da base pela altura:

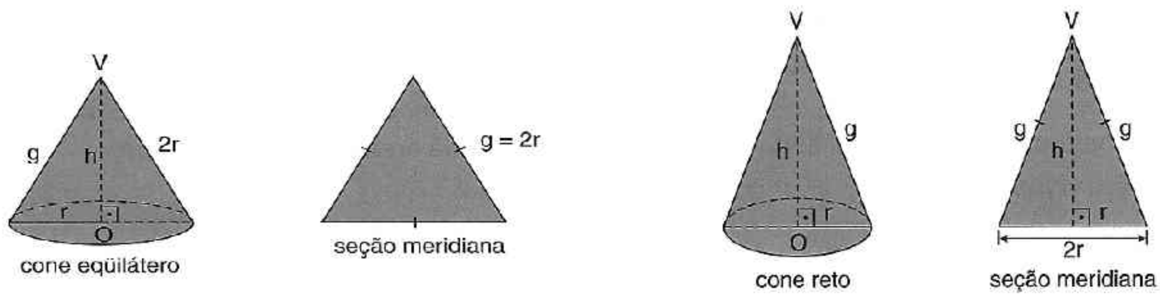
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Exemplo:

2) Seja um cone reto de geratriz de 10 cm e altura de 8 cm. Vamos determinar o seu volume.

5.6) Seção meridiana e cone equilátero

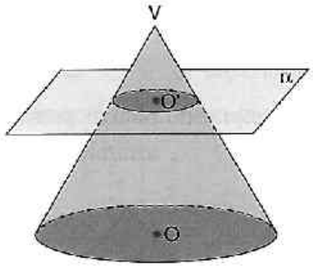
Seção meridiana de um cone é a intersecção dele com um plano que contém o eixo.
A seção meridiana de um cone reto é um triângulo equilátero.



Cone equilátero é um cone cuja seção meridiana é um triângulo equilátero.

5.7) Tronco de cone

Tronco de cone de bases paralelas é a reunião da base de um cone com uma seção transversal e com o conjunto dos pontos do cone compreendidos entre os planos da base e da seção transversal.

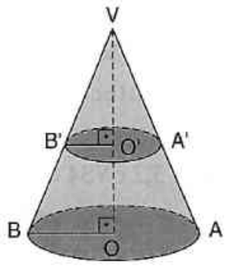


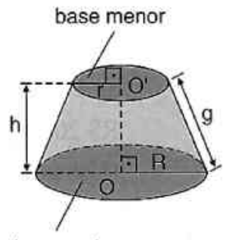
α paralelo à base

5.7.1) Elementos

✓ A base do cone é a base maior do tronco, e a seção transversal é a base menor.

✓ A distância entre os planos das bases é a altura do tronco.





5.7.2) Áreas

Áreas das bases: A_B, A_b

A área da Base maior é a área de um círculo de raio R. Logo:

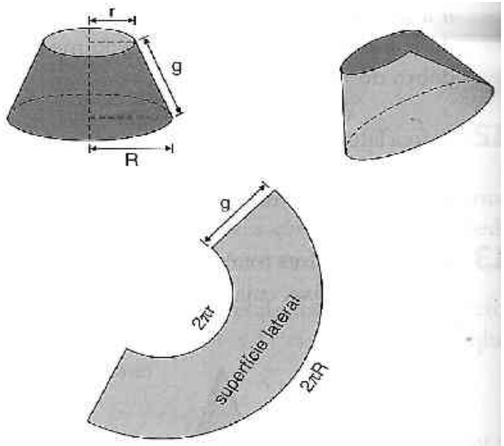
$$A_B = \pi R^2$$

A área da base menor é a área de outro círculo, de raio r. Logo:

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral : A superfície lateral de um tronco de cone reto de raios r e R e geratrizes g é equivalente a um trapézio de bases $2\pi r$ e $2\pi R$ e altura g. Logo:

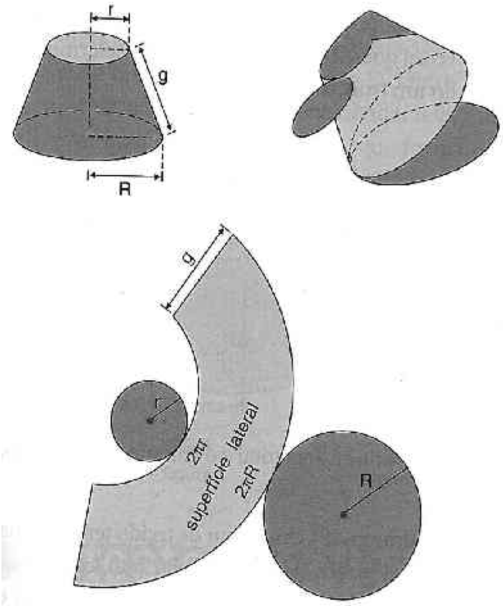
$$A_t = \pi\left(R + r\right)g$$



Área total : A_t

A área de um tronco de cone é a soma da área lateral com a área da base maior e com a área da base menor:

$$A_t = A_l + A_B + A_b$$



5.7.3) Volume

O volume de um tronco de cone de bases paralelas é obtido pela diferença dos volumes de dois cones. Logo:

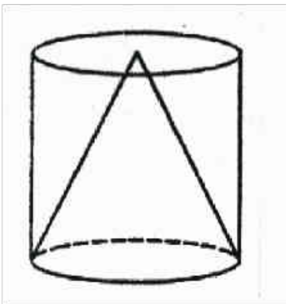
$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Exemplo :

3) Calcular a área lateral, a área total, o volume de um tronco de cone reto de bases paralelas, cuja geratriz mede 7 cm, e os raios das bases medem 3 cm e 5 cm.

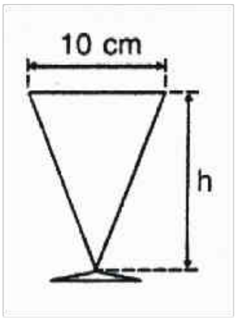
Exercícios

1) (Fuvest) O volume do cilindro é 7,086 cm³. O volume do cone é, portanto, em mm³,



a) 23,62 c) 3543
b) 35,43 d) 2362

2. (Unirio) Uma tulipa de chope tem a forma cônica, como mostra a figura ao lado. Sabendo-se que sua capacidade é de 100 π ml, a altura h é igual a:



a) 20 cm c) 12 cm
b) 16 cm d) 8 cm

3. (ITA) Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e 15 π dm² de área lateral, o valor de seu volume, em dm³, é:

a) 9 π c) 20 π
b) 12 π d) 36 π

4. (PUC-RS) Num cone de revolução, a área da base é 36 π m² e a área total é 96 π m². A altura do cone, em m, é igual a:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

5. (UFOP) um cone circular reto tem por base uma circunferência de comprimento igual a 6 π cm e sua altura é 2/3 do diâmetro da base. Posto isto, sua área lateral, em cm², é:

a) 5 π c) 12 π
b) 9 π d) 15 π

6. (UEL-PR) O diâmetro da base de um cone circular reto mede 12 cm. Se a área da base é 3/8 da área total, o volume desse cone, em cm³, é:

a) 48 π c) 144 π

b) 96 π d) 198 π

7. (UFPA) Um cone eqüilátero tem a área da base 4 π cm². A sua lateral, em cm², é:

a) 2 π c) 8 π
b) 4 π d) 16 π

8. (Mack) Um cone e um prisma quadrangular regular retos têm bases de mesma área. O prisma tem altura 12 e volume igual ao dobro do volume do cone. Então a altura do cone vale:

a) 36 b) 24 c) 18 d) 9

9. (UFMG) Um cone circular reto tem raio da base igual a 3 e altura igual a 6. A razão entre o volume e a área da base é:

a) 3 b) 1,5 c) 2 d) 4

10. (Fatec) Suponham-se dois cones retos, de modo que a altura do primeiro é quatro vezes a altura do segundo e o raio da base do primeiro é a metade do raio da base do segundo. Se V1 e V2 são, respectivamente, os volumes do primeiro e do segundo cone, então:

a) V1 = V2
b) V1 = 2V2
c) 2V1 = 3V2
d) 3 V1 = 2V2

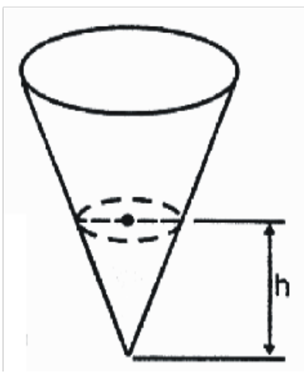
11. (UFMG) Considerem-se dois cones. A altura do primeiro é o dobro da altura do segundo; o raio da base do primeiro é a metade do raio da base do segundo. O volume do segundo é de 96 π . O volume do primeiro é:

a) 48 π c) 128 π
b) 64 π d) 144 π

12. (UFMG) Um reservatório de água tem foram de um cone circular reto, de eixo vertical e vértice para baixo. Quando o nível de água atinge a metade da altura do tanque, o volume ocupado é igual a π . A capacidade do tanque é:

a) 2 π c) 6 π
b) 4 π d) 8 π

13. (UFMG) Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto, com seu vértice apontado para baixo. O raio do topo é igual a 9 m e a altura do tanque é de 27 m. pode0-se afirmar que o volume V da água no tanque, como função da altura h da água é:



a) V = $\frac{\pi h^3}{27}$ c) V = $\frac{\pi h^3}{3}$

b) V = $\frac{\pi h^3}{9}$ d) V = 3 π h^3

14. (Fuvest)Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro liquido colocado deve ser:

a) $\frac{8}{3}$ cm
b) 6 cm
c) 4 $\sqrt{3}$ cm
d) 6 $\sqrt{3}$ cm
e) $4\sqrt[3]{4}$ cm

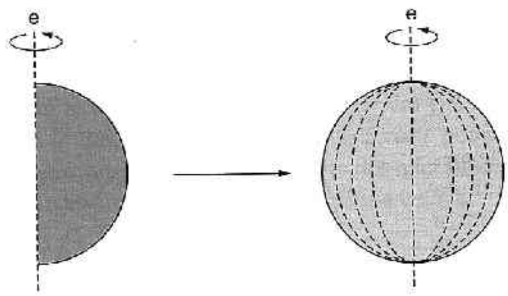
GABARITO

A –, 10 11.
B – 3, 6
C – 2, 4, 7, 8, 9
D – 1, 5, 12, 13

6) Esfera

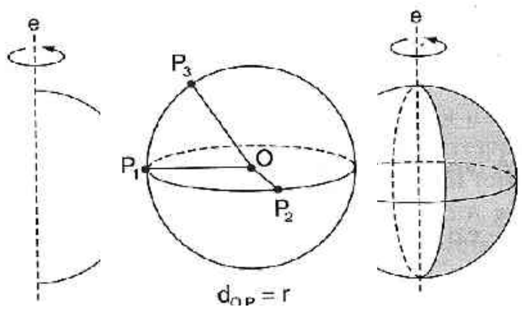
6.1) Conceitos

A esfera é o sólido de revolução gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém um diâmetro.



6.2) Superfície esférica

Superfície esférica de centro O e raio é o conjunto dos pontos P do espaço que distam r do ponto O.



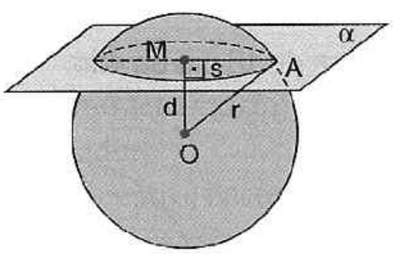
A superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro é uma superfície esférica.

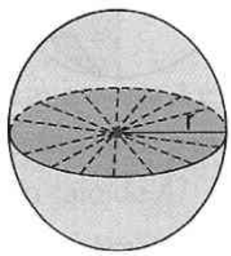
6.3) Seção da esfera

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.
Sendo r o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e s o raio da seção, vale a relação:

$$s^2 + d^2 = r^2$$

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.





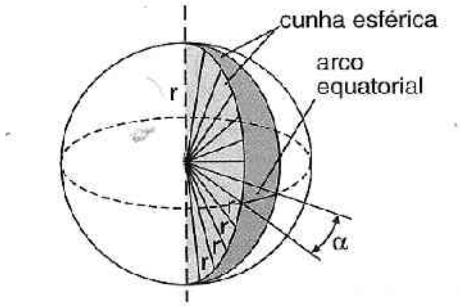
6.4) Partes da esfera.

6.4.1) Fuso esférico

Se uma semicircunferência com as extremidades num eixo, ela gira α graus (0° < α ≤ 360°) em torno do eixo, ela gira uma superfície que é chamada fuso esférico.

6.4.2) Cunha esférica

Se um semicírculo com diâmetro num eixo gira α graus (0° < α $\leq$ 360°)em torno do eixo, ele gera um sólido que é chamado cunha esférica.



Exemplo:

1) Suponha que se consiga cortar uma laranja esférica de doze gomos idênticos, de modo que apareça, como resultado do corte, um gomo completo. Calcule o volume e área da superfície esférica obtida.

6.5) Áreas e volume

6.5.1) Área da superfície esférica

A área de um superfície esférica de raio r é igual a :

$$A = 4\pi r^2$$

6.5.2) Volume da esfera

O volume de uma esfera de raio r é igual a :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemplo :

2) Uma esfera é seccionada por um plano a 8 cm do centro, a seção obtida tem área 36 π cm^2. Determinar a área da superfície da esfera e seu volume.

6.5.3) Área do fuso

- ✓ Para α em graus: $$A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

- ✓ Para α em radianos: $$A_{fuso} = 2r^2\alpha$$

6.5.4) Volume da cunha

- ✓ Para α em graus: $$V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

- ✓ Para α em radianos: $$V_{cunha} = \frac{2r^3\alpha}{3}$$

Exemplo:

3) Calcular a área total e o volume de um cunha esférica de $\frac{\pi}{6}$ radianos, retirada de uma esfera de 10 cm de raio.

Exercícios

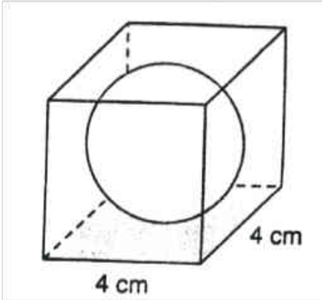
1. É dada uma esfera de raio 10 cm. Um plano α secciona essa esfera a uma distancia de 6 cm do centro da mesma. Calcule o raio da secção.

2. Calcule a área de uma superfície esférica de raio R = 3 cm.

3. Uma secção feita numa esfera por um plano é 2 π cm. A distância do centro da esfera ao plano α e $2\sqrt{2}$. Calcule a medida *r* do raio da esfera.

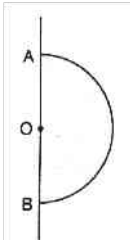
4. Sabendo que a área de uma superfície esférica é 8 π cm^2, calcule o raio da esfera.

5. A figura mostra uma esfera inscrita num cubo de aresta 4 cm (note que o plano de cada face do cubo é tangente à esfera). Calcule a área da superfície esférica.



6. (Faap-SP) A área da superfície de uma esfera e área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é 12 π dm^3 e o raio da base é 3 dm.

7. Qual a área da superfície esférica gerada pela rotação completa do semicírculo da figura em torno do seu diâmetro AB ?
   AO = 5 cm



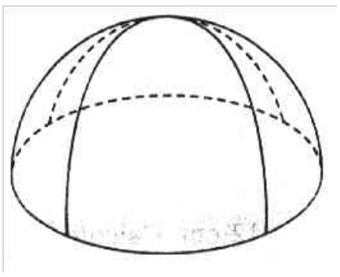
8. Um plano secciona uma esfera de raio 20 cm. A distância de centro da esfera ao plano é 12 cm. Calcule a área da secção obtida.

9. (Unicamp-SP) O volume V de uma bola de raio r é dado pela formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

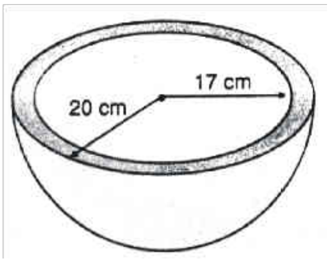
a) Calcule o volume de uma bola de raio r = $\frac{3}{4}$ cm. Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número $\frac{22}{7}$.

b) Se uma bola de raio r = $\frac{3}{4}$ cm é feita com um material cuja a densidade volumétrica (quociente da massa pelo volume) é de 5,6 g/cm³, qual será a sua massa?

10. Um reservatório em forma de uma semi-esfera tem 18 m de diâmetro. Qual o volume de água que cabe nesse reservatório?



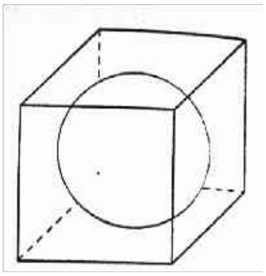
11. O recipiente da figura é feito de madeira com densidade 0,7 g/m³ e tem a forma de uma semi-esfera com raio externo de 20 cm e raio interno de 17 cm. Calcule a massa, em quilogramas, desse recipiente.



12. (UMC-SP) Um joalheiro fundiu uma esfera de ouro de raio 6 mm para transformá-la num bastão cilíndrico reto, cujo raio da base era igual ao da esfera. Calcule o comprimento do bastão.

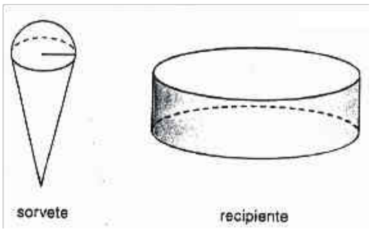
13. Uma esfera é seccionada por um plano α distante 12 cm do centro da esfera. O raio da secção obtida é 9 cm. Calcule o volume da esfera.

14. (Unitau-SP) Uma esfera está inscrita em um cubo de aresta 4 cm. Calcule a área da superfície esférica e o volume da esfera.

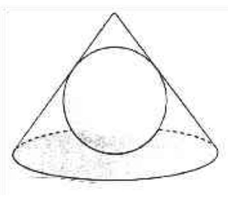


15. Uma esfera está inscrita num cilindro eqüilátero de raio *a*. Qual é a razão entre o volume V1 da esfera e o volume V2 do cilindro?

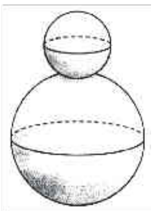
16. (UnB-DF) Um sorveteiro vende sorvetes em casquinhas de biscoito que têm a forma de cone de 3 cm de diâmetro e 6 cm de profundidade. As casquinhas são totalmente preenchidas se sorvete e, ainda, nelas é superposta uma meia bola de sorvete de mesmo diâmetro do cone. Os recipientes onde é armazenado o sorvete têm forma cilíndrica de 18 cm de diâmetro e 5 cm de profundidade. Determine o numero de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio.



17. (UFPE) A figura ilustra a esfera de maior raio contida no cone reto de raio da base igual a 6 e altura igual a 8, tangente ao plano da base do cone. Qual o inteiro mais próximo da metade do volume da região do cone exterior à esfera?

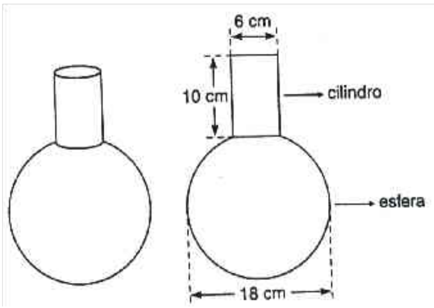


18. (UFRJ) Ping Oin recolheu 4,5 m³ de neve para construir um grande boneco de 3 m de altura, em comemoração à chegada do verão no Pólo Sul. O boneco será composto por uma cabeça e um corpo, ambos em forma de esfera, tangentes, sendo o corpo maior que a cabeça, conforme mostra a figura. Para calcular o raio de cada uma das esferas, Ping Oin aproximou por 3.



Calcule, usando a aproximação considerada, os raios das duas esferas.

19. Calcule, aproximadamente, a capacidade em mililitros do recipiente indicado na figura. Adote π = 3,14.



20. (UFSC) Um recipiente de forma cilíndrica medindo 12 cm de raio interno é preenchido com água até uma altura *h*. Uma bola (esfera) de raio 12 cm é colocada no fundo desse recipiente e constatamos que a água recobre exatamente o nível da bola. Quanto mede a altura *h* (em centímetros)?

21. Ache a área de um fuso esférico de 45º, contido numa circunferência de raio 8 cm.

22. Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 6 cm, cujo ângulo diedro mede:

a) 60º b) rad

23. A área de um fuso esférico mede 25 cm². Sabendo que o ângulo do fuso mede rad, calcule o raio da superfície esférica.

GABARITO

1) 8 cm
2) 36 cm²
3) 3 cm
4) cm
5) 16 cm²
6) dm
7) 100 cm²
8) 256 cm²
9) a) 99 cm³
b)9,9 g
56
10) 486 m³
11) 4,53 kg
12) 8 mm
13) 4 500 m³
14) 16 cm² e cm³
15) 2
3
16) 60 casquinhas
17) 94
18) m e 1 m
19) 3334,68 ml
20) 8 cm
21) 32 cm²
22) a) 48 m³
b) 36 m³
23) 5 cm